نگرش

جزوه مدرسه آنلاین نگرش

نام استاد

مجید علایی نسب

نام درس

گسسته: نظریه اعداد

قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a=bq+r$ و $0\leq r<b$.

مثال: در هر حالت باقیمانده و خارج‌قسمت تقسیم a بر b را بیابید:

$a=126\ ,\ b=8$

$a=84\ ,\ b=12$

$a=18\ ,\ b=20$

مثال: در هر حالت باقیمانده و خارج‌قسمت تقسیم را با توجه به تساوی داده شده مشخص کنید:

۱) $a=12q+4$

۲) $a=18q+20$

۳) $a=15q+1423$

۴) $a=۲۶q-۱۱$

۵) $a=۳۲q-۷۰$

۶) $a=۱۰q-۱۲۶$

نتیجه: اگر در تقسیمی

دقت کنید: با توجه به رابطه تقسیم یعنی $a=bq+r$ و $0\leq r<b$ می‌توانیم به نتایج مهم زیر برسیم:

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

مثال: در تقسیم عدد صحیح a بر ۲۶ باقیمانده بیشترین مقدار ممکن بوده و خارج‌قسمت ۱۲ است. جمع ارقام a کدام است؟

چند مثال مهم:

مثال۱: اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a=bq+r$ که در آن $0\leq r<b$ در این صورت $q=\left[\frac{a}{b}\right]$.

نتیجه مهم: تعداد مضارب صحیح مثبتی از b که کوچک‌تر یا مساوی a هستند برابر است با:

$$\left[\frac{a}{b}\right]$$

تست: خارج قسمت تقسیم عدد $13!-1$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) $12!$

۲) $12!-1$

۳) $12!+1$

۴) $13!-11$

تست: چند عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۶۷۲ وجود دارد که مضرب ۱۱ باشد؟

۱) ۵۹
۲) ۶۰
۳) ۶۱
۴) ۶۲

تست: چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که مضرب ۱۷ باشد؟

۱) ۵۲
۲) ۵۳
۳) ۵۴
۴) ۵۵

تست: چند عدد طبیعی ۳ رقمی وجود دارد که مربع کامل بوده و مضرب ۵ باشد؟

۱)
۲)
۳)
۴)

مثال۲: ثابت کنید مربع هر عدد صحیح و فرد به فرم $8q+1$ یا $8q'-7$ نوشته می‌شود.

نتیجه مهم: تمام اعداد صحیح فرد اگر به توان زوج طبیعی برسند در تقسیم بر عدد ۸ باقیمانده یک دارند.

تست: باقیمانده تقسیم $۱۳۹۹^{۱۴۰۰}$ بر عدد ۸ کدام است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۷

تست: اگر $n=۱۳۹۹^{۱۳۹۷}\times۱۳۹۷^{۱۴۰۰}\times۱۵^{۱۸۶}\times۱۲۵^{۱۲۳}$ در این صورت باقیمانده تقسیم $n^{۴}+۶n^{۲}-۷$ بر ۱۲۸ کدام است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۱۲۶

تست: روی منحنی $x^{۲}+y^{۲}=۱۳۱۵$ چند نقطه با مختصات صیح یافت می‌شود؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۴

مثال۳: ثابت کنید در هر عدد تقسیم در مجموعه اعداد طبیعی اگر خارج‌قسمت مخالف صفر باشد مقسوم همواره از دو برابر باقیمانده بزرگ‌تر است.

یادآوری: عدد طبیعی $P>1$ را اول گویند هرگاه تنها مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن ۱ و P باشد. توجه داشته باشید که هر عدد اول مانند P چهار مقسوم‌علیه صحیح دارد ۱ و ۱− و P و $-P$

تست: در یک تقسیم مقسوم و مقسوم‌علیه و خارج قسمت اعدادی اول و باقی‌مانده برابر (۷) است خارج قسمت این تقسیم کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۵

۴) ۷

مثال: ثابت کنید اگر $p>3$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+5$ نوشته می‌شود.

نتیجه مهم: هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ مانند P به فرم $6k\pm1$ نوشته می‌شود و $P^{2n}=6q+1$ یعنی هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ اگر به توان عددی زوج و طبیعی برسد در تقسیم بر عدد ۶ باقیمانده ۱ می‌دهد.

تست : P عددی است اول، باقیمانده تقسیم P^{P+7} بر ۶ کدام است؟

۱) ۸

۲) ۱

۳) ۴

۴) ۱,۸

استراتژی‌های حل مسئله:

تست: در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b خارج قسمت و باقی‌مانده مساوی q می‌باشند. اگر ۳ واحد از مقسوم علیه کم شود، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقی‌مانده صفر می‌شود. مقادیر q کدامند؟

۱) ۸ و ۵
۲) ۹و ۴
۳) ۱۰و ۵
۴) ۱۰و ۸

تست: در یک تقسیم مقسوم ۵۰۰ واحد بیشتر از مقسوم علیه است و باقی‌مانده برابر(۵۰) است. حداکثر خارج قسمت کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

تست: چند عدد طبیعی وجود دارد که در تقسیم ۶۷۵ بر هر یک از آن‌ها باقیمانده ۵۰ شود؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

تست: چند عدد طبیعی وجود دارد که در تقسیم ۲۰۴۳ بر هر یک از آن‌ها خارج‌قسمت ۱۷ شود؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

تست: باقی‌مانده تقسیم a بر ۷ و ۱۱ به ترتیب برابر ۳ و ۴ است. باقی‌مانده تقسیم a بر ۷۷ چند است؟

۱) ۳۹

۲) ۴۳

۳) ۵۹

۴) ۶۱

تست: باقی‌مانده تقسیم عدد زوج a بر ۲۳ مساوی ۱۷ است. باقی‌مانده تقسیم $\frac{a}{۲}$ بر عدد ۲۳ کدام مقدار زیر است؟

۱) ۲۳

۲) ۱۷

۳) ۲۰

۴) وابسته به a

تست: بزرگترین عدد صحیحی که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۱۷ مساوی مربع خارج قسمت باشد، کدام است؟

۱) ۸۴

۲) ۸۲

۳) ۸۹

۴) ۹۲

تست: باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۹ برابر ۱۲ است، اگر a+۱۷ مضرب ۲۱ باشد رقم وسط کوچکترین عدد a کدام است؟

۱) ۴

۲) ۷

۳) ۸

۴) ۹

تست: در یک تقسیم باقی‌مانده برابر با ۲۹ و خارج قسمت ۱۳ است حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد بدون آنکه خارج قسمت تغییر کند؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

تست: در یک تقسیم باقی‌مانده برابر با ۲۱ و مقسوم‌علیه ۱۳۸ است حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد بدون آنکه خارج قسمت تغییر کند؟

۱) ۱۲۴

۲) ۱۲۵

۳) ۱۲۶

۴) ۶

تست: در عمل تقسیمی مقسوم علیه ۱۷ است و باقی‌مانده بیشتر از ۱۰ با افزودن ۶۰ واحد به مقسوم خارج قسمت چند واحد زیاد می‌شود؟

۱) دقیقا سه واحد

۲) دقیقا ۴ واحد

۳) ۳ یا ۴ واحد

۴) تغییر نمی‌کند

تست: در یک تقسیم به مقسوم ۵۲ واحد اضافه و از باقی‌مانده ۴ واحد کم می‌کنیم و بدون تغییر خارج قسمت ۲ واحد به مقسوم علیه اضافه می‌کنیم. خارج قسمت کدام است؟

۱) ۱۲

۲) ۲۸

۳) ۳۶

۴) ۴۰

تست: اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر b، باقی‌مانده بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد و $b|a-1$ ، آنگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم a^2 بر b کدام است؟($b>1$)

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) به a بستگی دارد

تست: در یک تقسیم اگر ۴۵ واحد به مقسوم اضافه کنیم، از باقی‌مانده به اندازه $\frac{3}{4}$ مقسوم علیه کم و یک واحد به خارج قسمت اضافه می‌شود. مجموع ارقام مقسوم علیه چند است؟

۱) ۹

۲) ۱۲

۳) ۱۸

۴) ۲۴

تست: در یک تقسیم مقسوم و مقسوم‌علیه و خارج قسمت و باقی‌مانده اعدادی اول می‌باشند اگر خارج قسمت کوچکتر از باقی‌مانده باشد چند جواب برای خارج قسمت وجود دارد؟

۱) هیچ

۲) یک

۳) ۲

۴) بی‌شمار

تست: در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b باقی‌مانده حداکثر خود را دارا می‌باشد و خارج قسمت برابر مقسوم علیه است باقی‌مانده‌ی a بر $(b+1)$ کدام است؟

۱) b

۲) $b-1$

۳) $b-2$

۴) ۰

تست: در یک تقسیم باقی‌مانده $(\frac{1}{9})$ مربع مقسوم علیه است و خارج قسمت برابر (۱۰۰) است حداکثر مقسوم کدام است؟

۱) ۴۱۲

۲) ۵۰۸

۳) ۵۸۴

۴) ۶۰۴

تست: در یک تقسیم به مقسوم و باقی‌مانده و خارج قسمت به ترتیب ۱۰۲ و ۲ و ۵ واحد اضافه می‌شود مقسوم علیه بدون تغییر می‌ماند. مقسوم علیه کدام است؟

۱) ۲۰

۲) ۱۵

۳) ۱۰

۴) ۵

تست: اگر a را بر b تقسیم کنیم رابطه $a=bq+r$ بدست می‌آید و اگر a را بر q تقسیم کنیم $a=qb'+r'$ بدست می‌آید چه رابطه‌ای میان r و r' وجود دارد؟

۱) $r=r'$

۲) $r\geq r'$

۳) $r'\leq r$

۴) نمی‌توان گفت

تست: هر گاه بدانیم که a بر b قابل قسمت است آنگاه خارج قسمت تقسیم a^3 بر b^3 کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۱۶

تست: در یک تقسیم مقسوم و مقسوم علیه را در $K \in \mathbb{Z}$ ضرب کرده‌ایم در این صورت خارج قسمت:

۱) در K ضرب می‌شود

۲) بر K تقسیم می‌شود

۳) K واحد اضافه می‌شود

۴) ثابت می‌ماند

تست: در یک تقسیم مقسوم و مقسوم علیه را بر $K \in \mathbb{Z}$ تقسیم کرده‌ایم در این صورت باقی‌مانده:

۱) در K ضرب می‌شود

۲) در $\frac{1}{K}$ ضرب می‌شود

۳) K واحد کم می‌شود

۴) ثابت می‌ماند

تست: شخصی تعدادی مداد دارد. اگر آن‌ها را دو تا دو تا بسته‌بندی کند، یکی زیاد می‌آید و اگر سه تا سه تا بسته‌بندی کند ۲ تا زیاد می‌آید و .... اگر ۱۰ تا ۱۰ بسته‌بندی کند ۹ تا زیاد می‌آید. حداقل تعداد مدادهای او کدام است؟

۱) ۲۵۲۱

۲) ۲۵۱۹

۳) ۲۲۵۱

۴) ۲۲۴۹

مثال: ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $3!$ بخش‌پذیر است.

پاسخ: روش اول: حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی را به صورت $n(n+1)(n+2)$ در نظر می‌گیریم.

$$n(n+1)(n+2)=\frac{1\times2\times3\times\ldots\times(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\times2\times3\times\ldots\times(n-1)}=\frac{(n+2)!}{(n-1)!}=3!\times\frac{(n+2)!}{3!\times(n-1)!}$$

$$=3!\times\frac{(n+2)!}{((n+2)-(n-1))!\times(n-1)!}=3!\times\binom{n+2}{n-1}\ (1)$$

چون $n-1$ از $n+2$ کم‌تر است پس حاصل $\binom{n+2}{n-1}$ یک عدد طبیعی مانند q است.

$q=\binom{n+2}{n-1}\xrightarrow{(1)}n(n+1)(n+2)=3!\times q\Rightarrow$ ضرب ۳ عدد متوالی مضرب $3!$ است.

روش دوم:

توجه: اگر عددی مانند c بر دو عدد a و b بخش‌پذیر باشد و a و b نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه عدد c بر حاصل‌ضرب a و b یعنی $a.b$ بخش‌پذیر است.

می‌دانیم از ۳ عدد متوالی حداقل یکی زوج است پس حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی بر ۲ بخش‌پذیر است. همچنین می‌دانیم از ۳ عدد متوالی همواره یکی مضرب ۳ است پس حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی بر ۳ نیز بخش‌پذیر است و چون ۲ و ۳ نسبت به هم اوّل هستند، پس حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی بر $6=2\times3$ یعنی $3!$ بخش‌پذیر است.

مثال: اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد (a^2+b^2+3) بر ۸ را بیابید.

پاسخ: چون a عددی صحیح و فرد است، پس $a+2$ نیز عددی فرد است و چون $a+2$ بر b بخش‌پذیر است پس b نمی‌تواند زوج باشد یعنی b فرد است. می‌دانیم مربع هر عدد فرد به‌صورت $8q+1$ می‌باشد، پس داریم:

$a^2=8t+1$ و $b^2=8q+1$

$$a^2+b^2+3=8t+1+8q+1+3=8t+8q+5=8(t+q)+5$$

با فرض $q'=t+q$ داریم: $a^2+b^2+3=8q'+5\xrightarrow{0\le5<8}$ باقی‌مانده $=5$

مثال: اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3-n$

(راهنمایی: برای n سه حالت $n=3k$ و $n=3k+1$ و ..... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3|n^3-n$).

پاسخ: اگر n را بر ۳ تقسیم کنیم، ۳ حالت خواهیم داشت یعنی:

$$1)\ n=3k \Rightarrow n^3-n=n(n^2-1)=3k(9k^2-1)=3\underbrace{(9k^3-k)}_{t}=3t \Rightarrow 3|n^3-n$$

$$2)\ n=3k+1 \Rightarrow n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)=(3k+1)(3k+1-1)(3k+1+1)$$
$$\Rightarrow n^3-n=3\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{q}=3q \Rightarrow 3|n^3-n$$

$$3)\quad n=3k+2 \Rightarrow n^3-n=n(n-1)(n+1)=(3k+2)(3k+1)(3k+3)$$
$$\Rightarrow n^3-n=3\underbrace{(k+1)(3k+2)(3k+1)}_{r}=3r \Rightarrow 3|n^3-n$$

بنابراین در هر حالت داریم: $3|n^3-n$

مثال: اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

پاسخ: با تقسیم a بر ۳، سه حالت داریم:

$1)\ a=3k \Rightarrow$ a مضرب ۳ است.

$2)\ a=3k+1 \Rightarrow a+2=3k+1+2=3k+3=3\underbrace{(k+1)}_{k'}=3k' \Rightarrow$ $a+2$ مضرب ۳ است.

$3)\quad a=3k+2 \Rightarrow a+4=3k+2+4=3k+6=3\underbrace{(k+2)}_{t}=3t \Rightarrow$ $a+4$ مضرب ۳ است.

مثال: ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

پاسخ: دو عدد صحیح متوالی را m و $m+1$ در نظر می‌گیریم.

$$A=(m+1)^3-m^3=m^3+3m^2+3m+1-m^3=3m^2+3m+1=3m(m+1)+1$$

حال بر حسب m دو حالت در نظر می‌گیریم.

m زوج باشد. $m: m=2k \Rightarrow A=(m+1)^3-m^3=3\times 2k(2k+1)+1=2\times\underbrace{3k(2k+1)}_{t}+1=2t+1$

m فرد باشد. $m: m=2k+1 \Rightarrow A=(m+1)^3-m^3=3(2k+1)(2k+1+1)+1=3(2k+1)(2k+2)+1$

$\Rightarrow A=3(2k+1)\times 2(k+1)+1=2\times 3\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{q}+1=2q+1$ عبارت $A=(m+1)^3-m^3$ همواره فرد است.